نام و نام خانوادگی : .....

شماره دانشجویی : .....

نام مدرس : .....

دانشگاه صنعتی شاهرود

دانشکده ریاضی

گروه آموزشی : **ریاضی**

تاریخ : **۱۳۹۳/۲/۲**

وقت : **۷۵** دقیقه

امتحان میان ترم درس : **ریاضی۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)**

نیمسال (~~اول~~ / **دوم**) **۱۳۹۳**- **۱۳۹۲**

توجه : <u>مطالب صفحه اول پاسخنامه را به دقت مطالعه نمایید.</u>

سوال ۱ - الف) مقدار $f(۰,۰)$ را طوری تعیین کنید که تابع $f(x,y)=\dfrac{xy^۲-x^۳}{x^۲+y^۲}$ در $(۰,۰)$ پیوسته باشد.

ب) مقدار $f_x(۰,۰)$ را بیابید. **۲۰ نمره**

سوال ۲ - معادله پارامتری مقطع رویه های $xy=۲$, $yz=۳$ را نوشته و

انحنای آن را در نقطه $(۲,۱,۳)$ به دست آورید. **۱۵ نمره**

سوال ۳ - معادله خط مماس بر مقطع دو رویه $x^۲+۲y^۲+۳z^۲=۶$, $xyz=۱$ را در نقطه $(۱,۱,۱)$ بنویسید.

۱۵ نمره

سوال ۴ - اگر تمام مشتقات نسبی مرتبه دوم $z=f(u,v)$ موجود باشند و $u=xy$, $v=x^۲-y^۲$

تابع $\dfrac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}$ را محاسبه کنید. **۱۵ نمره**

سوال ۵ - فرض کنید x ، y و z سه عدد حقیقی مثبت هستند بطوری‌که $x^۲+yz=۴$.

بیشترین مقدار عبارت $f(x,y,z)=xy+۲yz+۳zx$ را بیابید. **۱۵ نمره**

موفق باشید

پاسخ سوالات امتحان میان ترم درس ریاضی۲-فنی (۸ گروه هماهنگ)
نیمسال دوم ۹۳-۱۳۹۲

جواب سوال۱ : الف) ابتدا نشان می دهیم تابع f در $(۰,۰)$ دارای حد است.

می دانیم $-x^۲-y^۲ \le y^۲-x^۲ \le x^۲+y^۲$ بنابر این $-۱ \le \frac{y^۲-x^۲}{x^۲+y^۲} \le ۱$ و $-x \le \frac{xy^۲-x^۳}{x^۲+y^۲} \le x$

اکنون چون $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} x = ۰$ $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} (-x) =$ پس $\lim_{(x,y)\to(۰,۰)} \frac{xy^۲-x^۳}{x^۲+y^۲} = ۰$ و تعریف می‌کنیم : $f(۰,۰)=۰$

ب) به کمک تعریف مشتق سویی داریم :

$$f_x(۰,۰) = D_{(۱,۰)}f(۰,۰) = \lim_{h\to ۰}\frac{f((۰,۰)+h(۱,۰))-f(۰,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{f(h,۰)}{h} = \lim_{h\to ۰}\frac{-h}{h} = -۱$$

جواب سوال۲ : برای نوشتن معادله پارامتری منحنی قرار می دهیم $x=t$ و در نتیجه $y=\frac{۲}{t}$ و $z=\frac{۳t}{۲}$ اکنون داریم :

$$f(t)=(t,\frac{۲}{t},\frac{۳t}{۲}) \to f'(t)=(۱,\frac{-۲}{t^۲},\frac{۳}{۲}) \to f''(t)=(۰,\frac{۴}{t^۳},۰)$$

در نقطه مورد نظر داریم $t=۲$ و بنابر این $f'(۲)=(۱,\frac{-۱}{۲},\frac{۳}{۲}) \to f''(۲)=(۰,\frac{۱}{۲},۰)$

$$\to f'(۲)\times f''(۲)=(۱,\frac{-۱}{۲},\frac{۳}{۲})\times(۰,\frac{۱}{۲},۰)=(\frac{-۳}{۴},۰,\frac{۱}{۲}) \to |f'(۲)\times f''(۲)|=\sqrt{\frac{۹}{۱۶}+۰+\frac{۱}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۴}$$

$$|f'(۲)|=\sqrt{۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۹}{۴}}=\frac{\sqrt{۱۴}}{۲} \quad \to \quad k(۲)=\frac{|f'(۲)\times f''(۲)|}{|f'(۲)|^۳}=\frac{\sqrt{۱۳}/۴}{۱۴\sqrt{۱۴}/۸}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۷\sqrt{۱۴}}$$

جواب سوال۳ : خط مماس مورد نظر مساله ، بر هر دو رویه مماس است و در نتیجه بر بردار نرمال هر یک از آنها در نقطه مورد نظر عمود است. به کمک بردار گرادیان ، بردار نرمال رویه ها را محاسبه می‌کنیم.

$$xyz=۱ \to grad(xyz-۱)=(yz,xz,xy) \to \quad N_۱=(۱,۱,۱)$$

$$x^۲+۲y^۲+۳z^۲=۶ \to grad(x^۲+۲y^۲+۳z^۲-۶)=(۲x,۴y,۶z) \to \quad N_۲=(۲,۴,۶)$$

بردار هادی خط مماس بر مقطع رویه ها عبارت است از : $u=N_۱\times N_۲=(۱,۱,۱)\times(۲,۴,۶)=(۲,-۴,۲)$

معادله خط مماس عبارت است از : $\frac{x-۱}{۱}=\frac{y-۱}{-۲}=\frac{z-۱}{۱}$

جواب سوال۴ : داریم : $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\times\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\times\frac{\partial v}{\partial y}=xz_u-۲yz_v$

$$\frac{\partial^۲ z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(xz_u-۲yz_v)=z_u+x\frac{\partial}{\partial x}(z_u)-۲y\frac{\partial}{\partial x}(z_v)=z_u+x(z_{uu}\times u_x+z_{uv}\times v_x)-۲y(z_{vu}\times u_x+z_{vv}\times v_x)$$

$$=z_u+x(yz_{uu}+۲xz_{uv})-۲y(yz_{vu}+۲xz_{vv})=z_u+xyz_{uu}+۲x^۲z_{uv}-۲y^۲z_{vu}-۴xz_{vv}$$

جواب سوال۵ : برای استفاده از روش ضرایب لاگرانژ ، تابع $g(x,y,z,\lambda)=xy+۲yz+۳zx-\lambda(x^۲+yz-۴)$ را در نظر می گیریم. در نقاط اکسترمم باید داشته باشیم :

$$g_x=y+۳z-۲\lambda x=۰\ ,\ g_y=x+۲z-\lambda z=۰\ ,\ g_z=۲y+۳x-\lambda y=۰\ ,\ g_\lambda=-(x^۲+yz-۴)=۰$$

از معادله دوم داریم $z=\frac{x}{\lambda-۲}$ و از معادله سوم داریم $y=\frac{۳x}{\lambda-۲}$ از معادله اول داریم $\frac{۳x}{\lambda-۲}+\frac{۳x}{\lambda-۲}-۲\lambda x=۰$ که نتیجه می‌دهد $\frac{۲x(-\lambda^۲+۲\lambda+۳)}{\lambda-۲}=۰$ چون $x>۰$ پس $-\lambda^۲+۲\lambda+۳=۰$ یعنی $\lambda=۳$ و یا $\lambda=-۱$

جواب $\lambda=-۱$ نتیجه می دهد $y=-x$ که غیر قابل قبول است. اما $\lambda=۳$ نتیجه می دهد که $y=۳x\ ,\ z=x$

به کمک شرط مساله داریم $x^۲+۳x^۲=۴$ که نتیجه می دهد $x=۱\ ,\ y=۳\ ,\ z=۱$. می توان دید که $f(۱,۳,۱)=۱۲$ مقدار ماکزیمم f با شرایط داده شده است.

سیدرضا موسوی